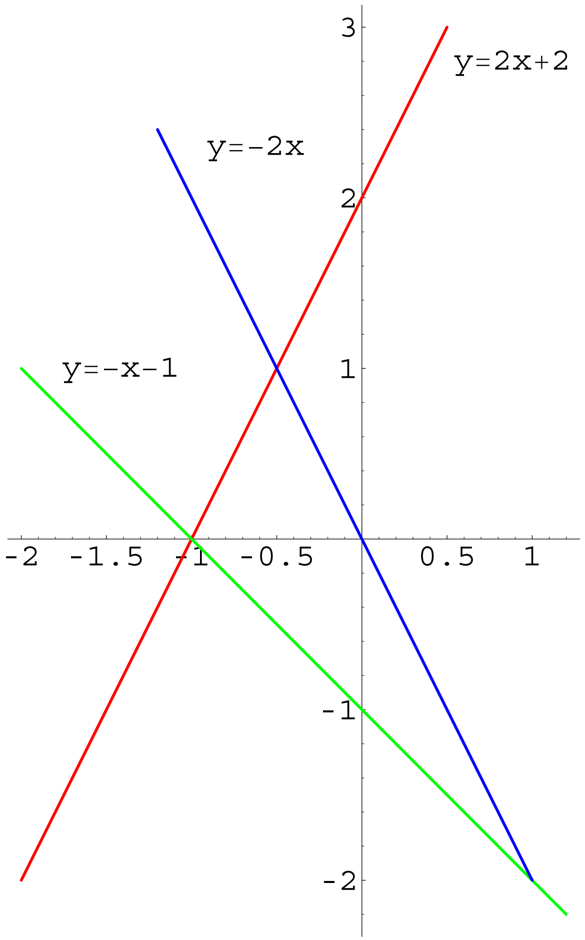
Линейна и квадратна функция – графики.
Линейни уравнения и неравенства.
Квадратни уравнения и неравенства.
Системи линейни уравнения

Катедра Математика

Факултет Природни науки и образование

1. ЛИНЕЙНА ФУНКЦИЯ. ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА



$y = ax + b$ ***е Линейна функция. Графиката й е права линия.***

Ако $a > 0$, ***функцията е монотонно растяща, а ако*** $a < 0$, ***тя е монотонно намаляваща.***

$ax + b = 0$ ***Линейно уравнение или уравнение от първа степен.***

При $a \neq 0$ ***уравнението има единствено решение*** $x = -\dfrac{b}{a}$.

При $a = 0, \quad b \neq 0$ ***уравнението няма решение.***

При $a = 0, \quad b = 0$ ***всяко реално число*** x ***е решение.***

$ax+b>0,\quad ax+b<0,\quad ax+b\geq 0$ *и* $ax+b\leq 0$ ***са Линейни неравенства.***

При $a>0$ ***неравенството*** $ax+b>0$ ***има решение*** $x>-\dfrac{b}{a} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left(-\dfrac{b}{a},+\infty\right).$

При $a>0$ ***неравенството*** $ax+b<0$ ***има решение*** $x<-\dfrac{b}{a} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left(-\infty,-\dfrac{b}{a}\right).$

При $a<0$ ***умножаваме двете страни на неравенството с*** **(-1).** ***Знакът на неравенството се сменя.***

Пример. Решете неравенствата:

$$1)\quad 3x-5>0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x>5 \quad\Leftrightarrow\quad x>\frac{5}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left(\frac{5}{3},+\infty\right).$$

$$2)\quad -4x\leq 0\,\Big|.(-1) \quad\Leftrightarrow\quad 4x\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in[0,+\infty).$$

$$3)\quad -2x+5\geq 0\,\Big|.(-1) \quad\Leftrightarrow\quad 2x-5\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\leq\frac{5}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right].$$

2. СИСТЕМИ ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ С ДВЕ НЕИЗВЕСТНИ

$\left|\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right.$ ***е линейна система за неизвестните*** $x,\ y$ ***. Решава се със заместване или със събиране.***

Пример. Решете системата $\left|\begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ x - 3y = 4. \end{array}\right.$

Решение. I начин - със заместване.

От второто уравнение изразяваме $x = 4 + 3y$ ***и заместваме в първото уравнение.***

$$3(4+3y) + 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 12 + 11y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 11y = -11 \quad \Leftrightarrow \quad y = -1.$$

Заместваме и намираме $x = 4 + 3(-1) = 1$. ***Решението на системата е*** $x = 1,\ y = -1.$

II начин - със събиране.

$\left|\begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ x - 3y = 4 \,\big|.(-3) \end{array}\right.$ ***Умножаваме второто уравнение с (-3)***

$$+\left|\begin{array}{l} 3x+2y=1 \\ -3x+9y=-12 \end{array}\right.$$

$$\overline{\qquad\qquad 11y=-11}$$

Събираме почленно двете уравнения. Намираме $y=-1$.

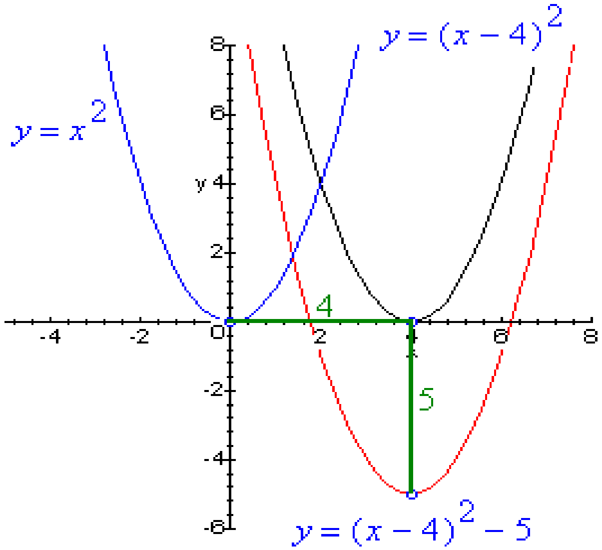
Заместваме в $x-3y=4$. ***Намираме*** $x=4+3(-1)=1$. ***Решението на системата е*** $x=1,\ y=-1$.

Задачи. Да се решат системите линейни уравнения:

1) $\left|\begin{array}{l} x-2y=3 \\ 5x+y=4 \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} x+3y=2 \\ 13x+y=3 \end{array}\right.$

3) $\left|\begin{array}{l} 3x-2y=1 \\ 2x+3y=31 \end{array}\right.$ 4) $\left|\begin{array}{l} 3x-5y=8 \\ x+y=0. \end{array}\right.$

3. КВАДРАТНА ФУНКЦИЯ. КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА



$$f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$$

Квадратна функция

$$ax^2+bx+c=0$$

Квадратно уравнение

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$=a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})$$

$$=a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2})$$

$$D=b^2-4ac$$

Дискриминанта - Разделител

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Решения (корени) на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

1. *D>0, два реални различни корена* $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$**;**

2. *D=0, двоен (двукратен) реален корен* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$**;**

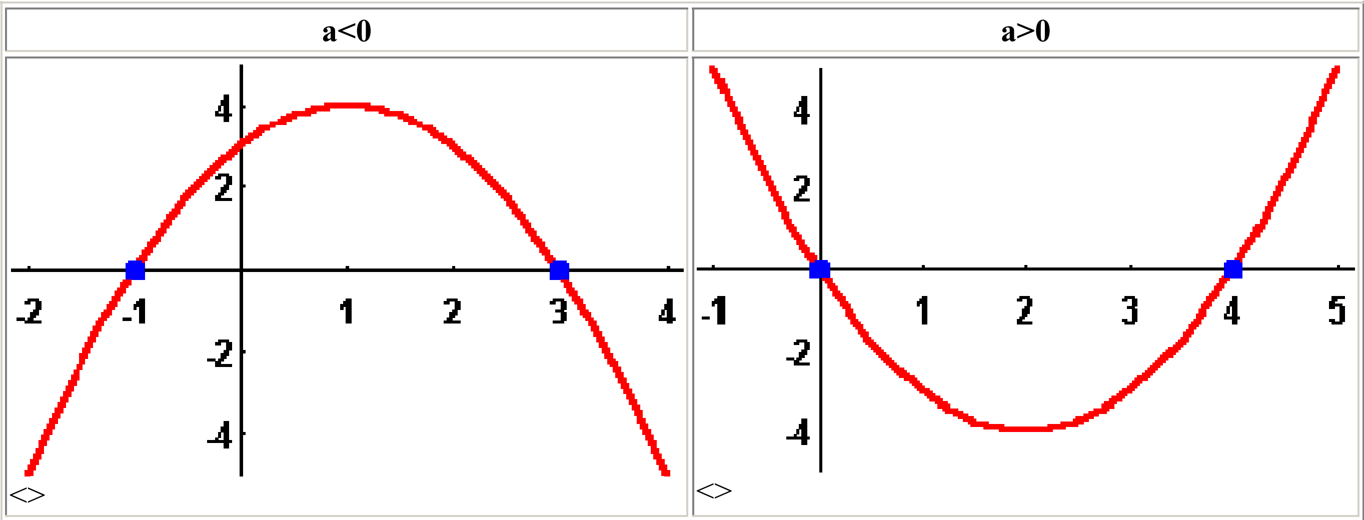
3. *D<0, нереални корени, два различни комплексно спрегнати корена* $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$.

1. $D>0,\ a>0,\ f(x)>0 \ \leftrightarrow\ x<x_2$ *или* $x>x_1 \ \leftrightarrow\ x\epsilon(-\infty,x_2)U(x_1,\infty)$,

$f(x)<0 \ \leftrightarrow\ x_2<x<x_1 \ \leftrightarrow\ x\epsilon(x_2,x_1)$

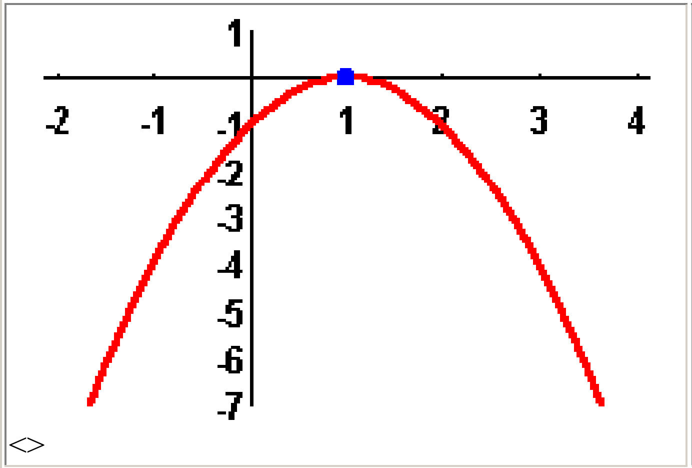
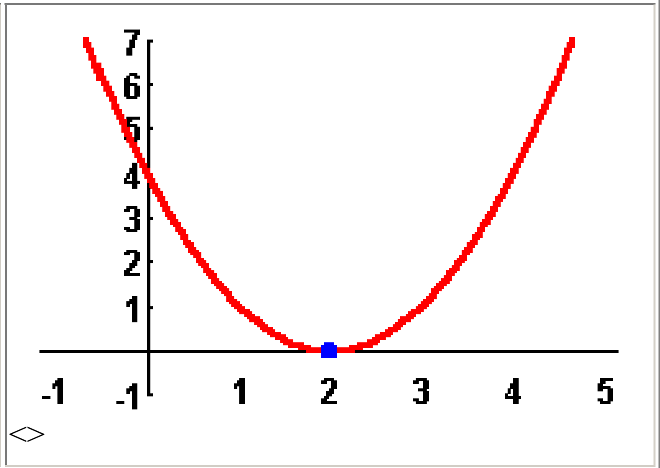
2. $D>0,\ a<0,\ f(x)>0 \ \leftrightarrow\ x_2<x<x_1 \ \leftrightarrow\ x\epsilon(x_2,x_1)$,

$f(x)<0 \ \leftrightarrow\ x<x_2$ *или* $x>x_1 \ \leftrightarrow\ x\epsilon(-\infty,x_2)U(x_1,\infty)$



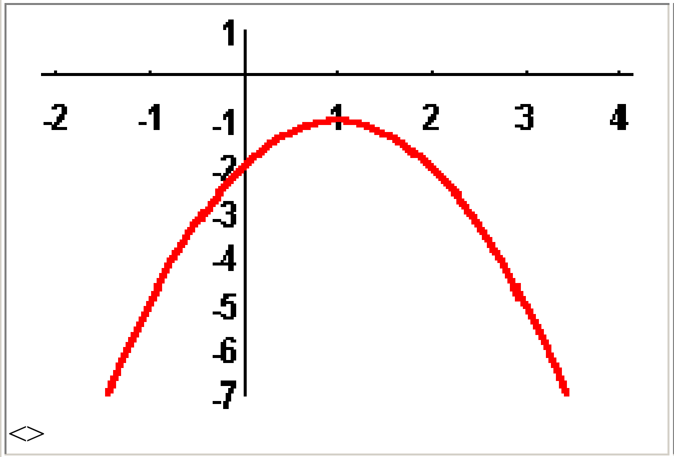
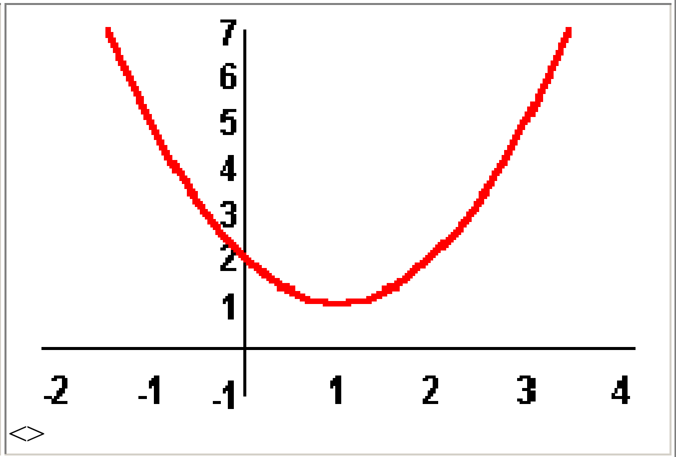
$$3.\ D=0,\ a>0,\ f(x)>0 \ \leftrightarrow\ x \neq x_2 = x_1 \ \leftrightarrow\ x \epsilon (-\infty, x_1) U (x_1, \infty),$$

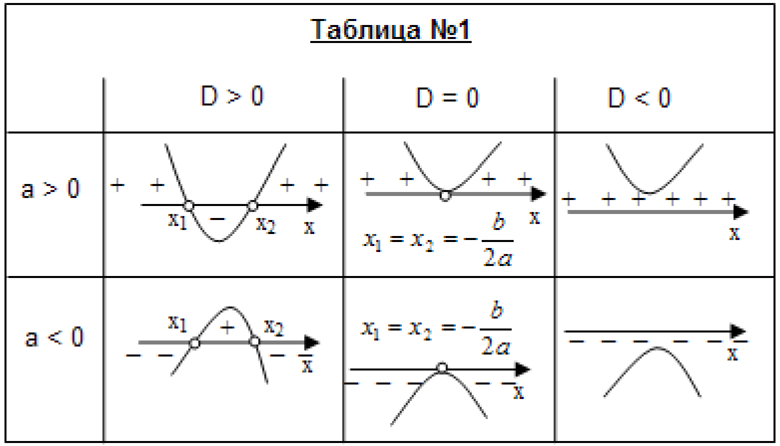
$$4.\ D=0,\ a<0,\ f(x)<0 \ \leftrightarrow\ x \neq x_2 = x_1 \ \leftrightarrow\ x \epsilon (-\infty, x_1) U (x_1, \infty),$$

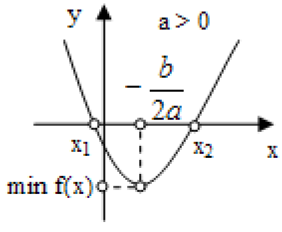
$a<0$	$a>0$
	

5. D<0, a>0, f(x)>0 ↔ за всяко x ($\forall x \in R$ ***) ↔ xϵ(-∞,∞), xϵR***

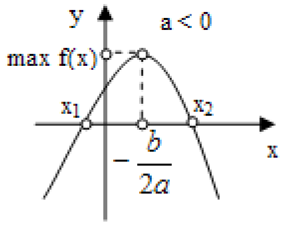
6. D<0, a<0, f(x)<0 ↔ за всяко x ($\forall x \in R$ ***) ↔ xϵ(-∞,∞), xϵR***

a<0	a>0
	





фиг. 1



фиг. 2

- **Свойство 1 –** ***Графиката на квадратната функция е парабола. Ако коефициентът а > 0, параболата е с върха надолу (Фиг. 1).***

  Ако коефициентът а < 0, параболата е с върха нагоре (Фиг. 2).

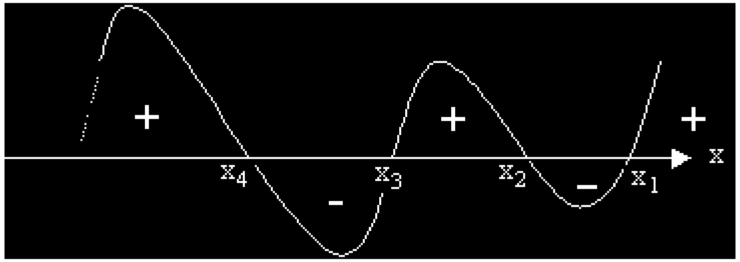
- **Свойство 2 –** ***При а > 0 функцията f(x) е намаляваща в интервала (-∞,-b/2a) и растяща в интервала (-b/2a,+∞). При а < 0 функцията f(x) растяща в интервала***

  (-∞,-b/2a) и намаляваща в интервала(-b/2a,+∞).

- **Свойство 3 –** ***От фиг. 1 и фиг. 2 се вижда, че при а > 0 функцията f(x) има най-малка стойност (min f(x)), която приема при х =-b/2a, но няма най-голяма стойност. При а < 0 функцията f(x) има най-голяма стойност (max f(x)), която приема при х =-b/2a, но няма най-малка стойност.***

4. МЕТОД НА ИНТЕРВАЛИТЕ ЗА РЕШАВАНЕ НА НЕРАВЕНСТВА

Този метод се използва за решаване на неравенства от вида: $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n) > 0$.
Предполагаме, че $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, x_n$ *са различни числа и* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_{n-1} > x_n$.
Графиката на функцията $y = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$ *има вида посочен на чертежа:*



Тя пресича оста Ox в точките и с абциси: $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$.

Това са решенията на уравнението $y = 0$.

В участъците, в които графиката е над оста Ox y е положително, а там, където е под нея – отрицателно. Това отразено със знаците + и – над и под абцисната ос.

Решенията на неравенството $y>0$ *е обединението на интервалите* $(x_1, +\infty) \cup (x_3, x_2) \cup \ldots$;

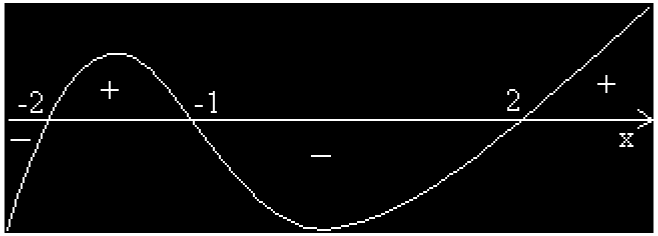
решенията на неравенството $y<0$ *е обединението на интервалите* $(x_2, x_1) \cup (x_4, x_3) \cup \ldots$

Задача. *Решете неравенството* $x^3 + x^2 - 4x - 4 > 0$.

Решение.

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Графиката на функцията $y = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$ *пресича оста Ox в точките* -1, 2, -2. *Това са решенията на уравнението* $y = 0$.



Решенията на неравенството $y > 0$ *са* $-2 < x < -1$ *и* $x > 2$.

Да се решат уравненията и неравенствата

1. $x^2 - 3x + 2 = 0;$
2. $x^2 - x - 6 = 0;$
3. $x^2 + x - 12 > 0;$
4. $(x-1)(x+2)(x-3) > 0;$
5. $x^2(x-1)(x+3) \le 0;$
6. $\frac{x(x-1)}{x+1} > 0;$
7. $\frac{x-11}{x^2-4x-5} \le 1$